

Notes sur le chapitre II

Convolution, corrélation et systèmes linéaires

Yves Goussard

Version du 20 février 2002

1 Introduction

Nous présentons ici les notions essentielles liées aux notions de produit de convolution et de fonction de corrélation. Nous introduisons ensuite les systèmes linéaires et mettons en évidence leurs principales propriétés se rapportant aux notions vues précédemment, tant au chapitre I qu'au présent chapitre. Ici encore, nous ne prétendons pas adopter une approche mathématiquement rigoureuse. Pour des démonstrations et des développements plus complets, reportez-vous aux notes du cours ELE3700 [1, chapitres 3 et 4].

2 Convolution

2.1 Définition et conditions d'existence du produit de convolution

On se place dans l'espace $\mathcal{E}$ des signaux $x(t)$ définis sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{C}$ et *et qui admettent une transformée de Fourier*. On a la définition suivante :

Définition 1 Soient $x(t)$ et $y(t)$ deux signaux de $\mathcal{E}$. Le produit de convolution de x et y , noté $x * y$ est défini par

$$\forall t \in \mathbb{R}, (x * y)(t) = \int_{\mathbb{R}} x(\tau)y(t - \tau)d\tau. \quad (1)$$

D'après la définition ci-dessus, le produit de convolution de x et y est défini pour tout t appartenant à $\mathbb{R}$, et est donc lui même un signal. Il est alors légitime de s'interroger sur les conditions d'existence et les propriétés de ce signal. Une première réponse est fournie par le résultat suivant, que nous admettons :

Résultat 1 Si x et y sont deux signaux de $\mathcal{E}$, alors leur produit de convolution $x * y$ est défini pour tout $t \in \mathbb{R}$ et appartient lui aussi à $\mathcal{E}$.

Remarque On peut se demander ce qui justifie l'introduction de l'opération de convolution de deux signaux telle qu'elle a été définie à l'équation 1. Cette définition n'a en effet rien d'intuitif et peut sembler difficile à interpréter physiquement. Il se trouve que le produit de convolution est un outil indispensable pour caractériser simplement le comportement entrée-sortie des systèmes linéaires invariants qui sont d'une très grande importance en analyse et en traitement de signal. Ce lien sera mis en évidence à la section 4 de ce document. Nous énonçons au préalable les principales propriétés du produit de convolution.

2.2 Propriétés

Nous avons admis que si x et y appartiennent à $\mathcal{E}$, alors $x * y$ appartient lui aussi à $\mathcal{E}$ et possède donc une transformée de Fourier. La première et principale propriété du produit de convolution porte sur la forme sa transformée de Fourier.

Résultat 2 Soient $x(t)$ et $y(t)$ deux signaux de $\mathcal{E}$ de transformée de Fourier respective $X(\nu)$ et $Y(\nu)$. On a :

$$(x * y)(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(\nu)Y(\nu) \quad (2)$$

Démonstration Notons $z(t) = (x * y)(t)$ et soit $Z(\nu)$ la transformée de Fourier de $z(t)$. En appliquant la définition de la transformée de Fourier, on a

$$\begin{aligned} Z(\nu) &= \iint_{\mathbb{R}} x(\tau)y(t - \tau)e^{-2i\pi\nu t} d\tau dt, \\ &= \iint_{\mathbb{R}} x(\tau)y(t - \tau)e^{-2i\pi\nu\tau}e^{-2i\pi\nu(t-\tau)} d\tau dt. \end{aligned}$$

Pour obtenir le résultat désiré, il suffit de faire apparaître explicitement l'expression des transformées de Fourier de x et de y , ce qui nécessite le changement de variables suivant :

$$\begin{cases} \tau \\ t \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} u = \tau \\ v = t - \tau \end{cases}.$$

La valeur absolue du déterminant du jacobien de cette transformation étant égale à 1, on peut écrire

$$Z(\nu) = \iint_{\mathbb{R}} x(u)e^{-2i\pi\nu u}y(v)e^{-2i\pi\nu v} du dv,$$

et il est possible de séparer l'intégrale double en un produit de deux intégrales simples, ce qui donne

$$\begin{aligned} Z(\nu) &= \int_{\mathbb{R}} x(u)e^{-2i\pi\nu u} du \int_{\mathbb{R}} y(v)e^{-2i\pi\nu v} dv, \\ &= X(\nu)Y(\nu), \end{aligned}$$

d'après la définition de la transformée de Fourier. □

Le résultat ci-dessus est important pour au moins deux raisons. D'une part, il montre que le produit de convolution dans $\mathcal{E}$ se transforme en un simple produit dans le domaine de Fourier. Il en résulte donc une simplification certaine, à condition toutefois que l'on puisse facilement passer de $\mathcal{E}$ au domaine de Fourier et réciproquement. D'autre part, il découle du résultat 2 ainsi que de

la linéarité de la transformée de Fourier que le produit de convolution possède toutes les propriétés du produit usuel. En particulier :

Commutativité On a :

$$X(\nu)Y(\nu) = Y(\nu)X(\nu) \implies (x * y)(t) = (y * x)(t).$$

Cette propriété de symétrie n'apparaît pas directement dans la définition de l'équation 1. Il est bien sûr possible de la démontrer de manière élémentaire par un changement de variable dans l'intégrale de convolution, mais il est beaucoup plus simple de la déduire du résultat 2.

Associativité On a :

$$X(\nu)(Y(\nu)Z(\nu)) = (X(\nu)Y(\nu))Z(\nu) \implies (x * (y * z))(t) = ((x * y) * z)(t).$$

Distributivité On a :

$$X(\nu)(Y_1(\nu) + Y_2(\nu)) = X(\nu)Y_1(\nu) + X(\nu)Y_2(\nu) \implies (x * (y_1 + y_2))(t) = (x * y_1)(t) + (x * y_2)(t).$$

Élément neutre Cette propriété s'écrit :

$$X(\nu)1_\nu = X(\nu) \implies (x * \delta)(t) = x(t).$$

Dérivation Si $x(t)$, $y(t)$ ainsi que leur dérivée première sont des éléments de $\mathcal{E}$, on a, d'après la propriété de dérivation de la transformée de Fourier :

$$2i\pi\nu X(\nu) Y(\nu) = X(\nu) 2i\pi\nu Y(\nu) \implies \left(\frac{dx}{dt} * y \right)(t) = \left(x * \frac{dy}{dt} \right)(t).$$

De plus, la translation dans $\mathcal{E}$ peut s'interpréter comme une opération de convolution. En effet

$$x(t - t_0) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(\nu) e^{-2i\pi\nu t_0} \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} x(t) * \delta(t - t_0).$$

2.3 Interprétation graphique

D'après la définition donnée à l'équation 1, $(x * y)(t)$ apparaît comme l'intégrale du produit de deux fonctions : $x(\tau)$ et $\varphi(\tau) = y(t - \tau)$. Le passage de $y(\tau)$ à $\varphi(\tau)$ peut être décomposé selon les opérations successives suivantes :

Retournement $\tau \rightarrow -\tau$ d'où $y(\tau) \rightarrow \phi(\tau) = y(-\tau)$,

Décalage de t $\tau \rightarrow \tau - t$ d'où $\phi(\tau) \rightarrow \varphi(\tau) = \phi(\tau - t) = y(t - \tau)$.

$(x * y)(t)$ apparaît donc comme l'intégrale du produit de x et de y retourné, puis décalé de t . De par la commutativité du produit de convolution, $(x * y)(t)$ est aussi l'intégrale du produit de y et de x retourné, puis décalé de t . Soulignons que l'ordre de ces opérations de retournement et de décalage est important. Le lecteur vérifiera par lui-même que l'on aboutit à un résultat différent si on intervertit l'ordre des deux opérations.

L'interprétation graphique des opérations ci-dessus est particulièrement intéressante lorsque les supports de x et y sont limités. Le chapitre 3 des notes de cours [1] en contient de nombreux exemples. Nous en donnons ci-après une illustration succincte.

Considérons deux signaux x et y définis par :

$$\begin{cases} x(t) = t, t \in [0, 2] \\ x(t) = 0, t \notin [0, 2] \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} y(t) = 3, t \in [2, 3] \\ y(t) = 0, t \notin [2, 3] \end{cases} \quad (3)$$

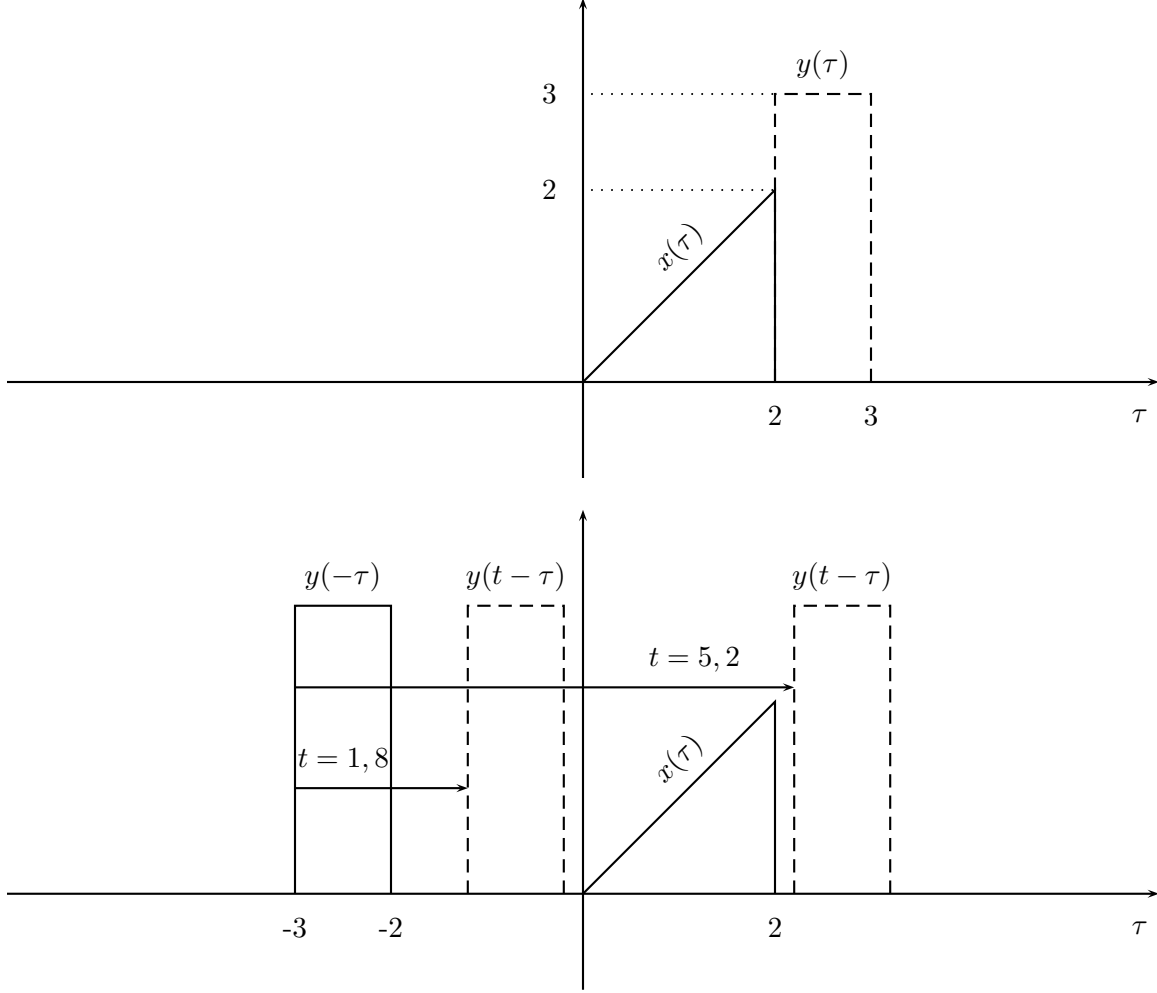


FIG. 1 – *Interprétation graphique du produit de convolution. Graphique du haut : fonctions $x(\tau)$ et $y(\tau)$. Graphique du bas : fonctions $x(\tau)$, $y(\tau)$ retournée ($y(-\tau)$) puis décalée de t ($y(t-\tau)$) pour les valeurs $t = 1,8$ et $t = 5,2$.*

De manière évidente, ces deux signaux appartiennent à $\mathcal{E}$; ils sont de plus à support borné et l'on cherche à préciser le support de leur produit de convolution $x * y$. Il s'agit donc de déterminer pour quelles valeurs de t la fonction de τ définie par $x(\tau)y(t-\tau)$ est uniformément nulle. Pour cela, il suffit que les supports de $x(\tau)$ et de $y(t-\tau)$ soient d'intersection vide. En effectuant les opérations de retournement et de décalage qui permettent de passer de la fonction $y(\tau)$ à la fonction $y(t-\tau)$ puis en observant le support des signaux résultants, les valeurs de t pour lesquelles cela se produit peuvent être déterminées graphiquement. Ceci est illustré à la figure 1. Après retournement, puis décalage de $y(\tau)$, on observe que $x(\tau)$ et $y(t-\tau)$ ont des supports disjoints pour toutes les valeurs de t qui n'appartiennent pas à l'intervalle $[2, 5]$. Le support de $x * y$ est donc inclus dans $[2, 5]$.

2.4 Calcul pratique

Pour calculer le produit de convolution de deux signaux appartenant à $\mathcal{E}$ et dont les expressions analytiques sont fournies, on peut généralement adopter deux approches : soit passer dans le

domaine de Fourier et utiliser le résultat 2, soit appliquer directement la définition du produit de convolution donnée à l'équation 1. Pour de nombreux exemples de ces diverses manières procéder, le lecteur est renvoyé au chapitre 3 des notes de cours [1] ainsi qu'au recueil d'exercices correspondant [2]. Un cas particulier important est celui où les signaux x ou y sont de support limité ou borné. Il est alors souvent préférable d'adopter la seconde approche, c'est-à-dire d'appliquer la définition du produit de convolution, et de suivre un certain nombre d'étapes afin de faciliter la mise en œuvre de la démarche. Nous illustrons ceci à l'aide de l'exemple traité au paragraphe 2.3.

Lorsque les signaux sont à support limité, la première étape est de les exprimer sous forme analytique à l'aide de fonctions échelon. Ainsi, d'après l'équation 3, on a :

$$x(t) = t(u(t) - u(t - 2)) \quad \text{et} \quad y(t) = 3(u(t - 2) - u(t - 3)).$$

La seconde étape consiste à déterminer les supports de $x(\tau)$ et $y(t - \tau)$ qui correspondent aux intervalles où la différence des fonctions échelon qui intervient dans leur définition est non nulle. Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} x(\tau) &= \tau(u(\tau) - u(\tau - 2)), \\ u(\tau) - u(\tau - 2) &\neq 0 \text{ pour } 0 \leq \tau \leq 2, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} y(t - \tau) &= 3(u(t - \tau - 2) - u(t - \tau - 3)), \\ u(t - \tau - 2) - u(t - \tau - 3) &\neq 0 \text{ pour } 2 \leq t - \tau \leq 3 \iff t - 3 \leq \tau \leq t - 2. \end{aligned}$$

Le produit de convolution sera donc égal à l'intégrale de la fonction 3τ sur l'intersection des supports déterminés ci-dessus, soit les intervalles $[0, 2]$ et $[t - 3, t - 2]$. L'étape suivante consiste à déterminer les bornes d'intégration correspondantes en fonction de la valeur de t , puis à calculer effectivement l'intégrale. Ainsi, on a :

- $t - 2 < 0 \iff t < 2$: les supports sont disjoints et $(x * y)(t) = 0$.
- $t - 3 \leq 0$ et $t - 2 \geq 0 \iff 2 \leq t \leq 3$: l'intersection des supports est l'intervalle $[0, t - 2]$ et par application de la définition :

$$(x * y)(t) = \int_0^{t-2} 3\tau d\tau = 3t^2/2 - 6t + 6.$$

- $t - 3 \geq 0$ et $t - 2 \leq 2 \iff 3 \leq t \leq 4$: l'intersection des supports est l'intervalle $[t - 3, t - 2]$ et on a alors :

$$(x * y)(t) = \int_{t-3}^{t-2} 3\tau d\tau = 3t - 15/2.$$

- $t - 3 \leq 2$ et $t - 2 \geq 2 \iff 4 \leq t \leq 5$: l'intersection des supports est l'intervalle $[t - 3, 2]$ et on a alors :

$$(x * y)(t) = \int_{t-3}^2 3\tau d\tau = -3t^2/2 + 9t - 15/2.$$

- $t - 3 > 2 \iff t > 5$: les supports sont disjoints et $(x * y)(t) = 0$.

On retrouve ainsi par le calcul le résultat graphique du paragraphe précédent selon lequel le support de $x * y$ est l'intervalle $[2, 5]$. Soulignons que, dans le cas général, la manière de déterminer les bornes du support de $x(\tau)y(t - \tau)$ dépend non seulement de la position, mais aussi de la taille respective des supports de x et de y .

3 Corrélation

3.1 Définition et interprétation

Comme pour l'étude du produit de convolution, on se place dans l'espace $\mathcal{E}$ des signaux définis sur $\mathbb{R}$ et qui admettent une transformée de Fourier. Ici, on suppose de plus que ces signaux sont à valeurs dans $\mathbb{R}$. On a la définition suivante :

Définition 2 Soient x et y deux signaux de $\mathcal{E}$. Leur fonction d'intercorrélation, notée $x \odot y$ est définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, (x \odot y)(t) = \int_{\mathbb{R}} x(\tau) y(\tau + t) d\tau. \quad (4)$$

Par ailleurs, lorsque x est égal à y , on parle de la fonction *d'autocorrélation* que l'on note $x \odot x$ et qui est définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, (x \odot x)(t) = \int_{\mathbb{R}} x(\tau) x(\tau + t) d\tau. \quad (5)$$

Notations Les fonctions $(x \odot y)(t)$ et $(x \odot x)(t)$ sont aussi notées $R_{xy}(t)$ et $R_x(t)$, respectivement. Dans la suite, nous utiliserons indifféremment l'une ou l'autre de ces notations.

Ici encore, les fonctions d'intercorrélation et d'autocorrélation sont elles-mêmes des signaux sur l'existence et les propriétés desquels il est légitime de s'interroger. Auparavant, il est utile de mettre en évidence deux résultats immédiats qui simplifient la réponse à ces questions.

Résultat 3 Corrélation et produit scalaire - Si on munit l'espace $\mathcal{E}$ du produit scalaire déjà utilisé dans nos interprétations géométriques et défini par

$$\langle u \cdot v \rangle = \int_{\mathbb{R}} u(\tau) v^*(\tau) d\tau,$$

alors, par simple inspection et en utilisant le fait que nous nous limitons aux signaux réels, $(x \odot y)(t)$ est égal au produit scalaire du signal x et du signal y décalé de $-t$. La fonction de corrélation à l'instant t peut donc être interprétée comme une mesure de la ressemblance entre x et y décalé de $-t$.

Résultat 4 Corrélation et convolution - Par simple application des définitions, on peut écrire

$$\begin{aligned} x(-t) * y(t) &= \int_{\mathbb{R}} x(-\alpha) y(t - \alpha) d\alpha, \\ &= \int_{\mathbb{R}} x(\tau) y(t + \tau) d\tau, \\ &= (x \odot y)(t), \end{aligned}$$

où le passage de la première à la deuxième ligne est obtenu en faisant le changement de variable $\tau = -\alpha$.

3.2 Conditions d'existence

D'après le résultat 4, les fonctions d'intercorrélation et d'autocorrélation s'interprètent comme des produits de convolution particuliers. Ces fonctions existent donc aux mêmes conditions que $x(-t) * y(t)$ et $x(-t) * x(t)$ respectivement. D'après le résultat 1 et en tenant compte du fait que $x(t) \in \mathcal{E} \iff x(-t) \in \mathcal{E}$, on a :

Résultat 5 Si x et y sont deux signaux de $\mathcal{E}$ à valeurs réelles alors la fonction d'intercorrélation $x \odot y$ et les fonctions d'autocorrélation $x \odot x$ et $y \odot y$ existent pour tout $t \in \mathbb{R}$ et appartiennent aussi à $\mathcal{E}$.

3.3 Principales propriétés

Symétrie D'après le résultat 4, on a

$$\begin{aligned} R_{xy}(t) &= x(-t) * y(t), \\ R_{yx}(t) &= x(t) * y(-t), \end{aligned}$$

ce qui indique que la corrélation n'est pas une opération commutative. On montrerait de manière analogue que la corrélation n'est pas associative. Par contre, par changement de variable $t \longrightarrow -t$ dans la seconde équation, on obtient immédiatement que $R_{yx}(-t) = R_{xy}(t)$ d'où la propriété de symétrie :

$$(x \odot y)(t) = (y \odot x)(-t). \quad (6)$$

Il en résulte que, pour la fonction d'autocorrélation, on a $(x \odot x)(t) = (x \odot x)(-t)$. La fonction d'autocorrélation est donc paire.

Valeur en zéro Par application de la définition, on a

$$R_x(0) = \int_{\mathbb{R}} x^2(t) dt,$$

ce qui montre que la valeur en zéro de la fonction d'autocorrélation de x est égale à l'énergie totale normalisée de ce signal.

Majoration D'après l'interprétation géométrique donnée au paragraphe 3.2, on a

$$R_x(t) = \langle x(\tau) \cdot x(\tau + t) \rangle.$$

Or on sait que, de par l'inégalité de Schwartz,

$$\forall u, v \in \mathcal{E}, |\langle u \cdot v \rangle| \leq \|u\| \|v\|.$$

En utilisant la définition du produit scalaire dans $\mathcal{E}$, on obtient

$$\begin{aligned} |R_x(t)| &\leq \left(\int_{\mathbb{R}} x^2(\tau) d\tau \int_{\mathbb{R}} x^2(\tau + t) d\tau \right)^{1/2}, \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} x^2(\tau) d\tau = R_x(0) \end{aligned}$$

La fonction d'autocorrélation est donc majorée en valeur absolue par sa valeur en 0. C'est pourquoi on utilise parfois le *coefficient d'autocorrélation* $\rho_x(t) \triangleq R_x(t)/R_x(0)$ dont la valeur est comprise entre -1 et 1 .

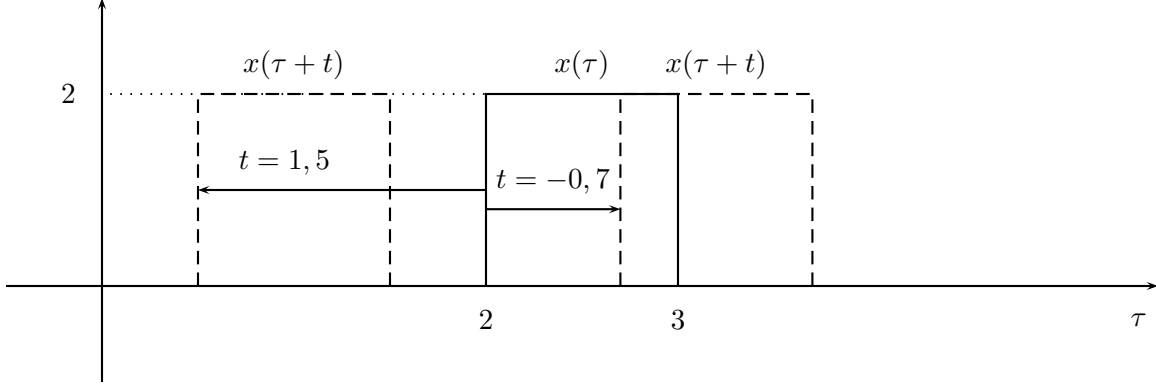


FIG. 2 – Interprétation graphique de la fonction d'autocorrélation. En traits pleins : fonction $x(\tau)$; en traits interrompus : fonction x décalée de $-t$ ($x(\tau + t)$) pour les valeurs $t = 1,5$ et $t = -0,7$.

Transformée de Fourier On a

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(R_x)(\nu) &= \mathcal{F}(x(t) * x(-t))(\nu), \\ &= X(\nu) X^*(\nu), \\ &= |X(\nu)|^2.\end{aligned}$$

La transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation est donc égale au spectre d'énergie.

3.4 Interprétation graphique

L'interprétation graphique du calcul de la fonction d'intercorrélacion de deux signaux est analogue à celle donnée pour le produit de convolution. Ceci est évidemment une conséquence du résultat 4. De manière élémentaire et en se reportant à la définition de l'équation 4, $(x \odot y)(t)$ apparaît comme l'intégrale du produit de deux fonctions : $x(\tau)$ et $\varphi(\tau) = y(\tau + t)$. Le passage de $y(\tau)$ à $\varphi(\tau)$ se fait par une simple opération de décalage de $-t$. Comme dans le cas du produit de convolution, cette interprétation est particulièrement intéressante lorsque les supports de x et y sont limités. La manière de déterminer le support de $x \odot y$ est analogue à celle exposée au paragraphe 2.3 en omettant l'étape de retournement et en inversant le sens du décalage.

Dans le cas de la fonction d'autocorrélation, une double simplification se produit en raison de parité de $R_x(t)$: d'une part, il n'est nécessaire de considérer que des valeurs de t positives, les valeurs négatives s'en déduisant par symétrie ; d'autre part, toujours par raison de symétrie, le décalage de $-t$ peut être remplacé par un décalage de t . L'exemple ci-après en illustre succinctement cette manière de procéder.

On considère le signal x défini par :

$$\begin{cases} x(t) = 2, & t \in [2, 3] \\ x(t) = 0, & t \notin [2, 3] \end{cases}.$$

Clairement, x est un élément de $\mathcal{E}$ dont le support est limité à l'intervalle $[2, 3]$. On cherche à déterminer le support et la forme de $x(\tau)x(\tau + t)$ en fonction de t . En effectuant l'opération de décalage de x , il apparaît immédiatement que, dès que $|t| > 1$, les supports de $x(\tau)$ et $x(\tau + t)$ sont disjoints. $R_x(t)$ est donc nul à l'extérieur de l'intervalle $[-1, 1]$. Lorsque $t \in [0, 1]$, le produit de $x(\tau)$ et $x(\tau + t)$ est une fonction constante et égale à 4 sur l'intervalle $[2, 3 - t]$ et nulle à l'extérieur

de cet intervalle. On en déduit que, sur $[0, 1]$, $R_x(t) = 4(1 - t)$. Par raison de symétrie, sur $[-1, 0]$, $R_x(t) = 4(1 + t)$ et on peut donc écrire :

$$\begin{cases} R_x(t) = 4(1 - |t|), & t \in [-1, 1] \\ R(t) = 0, & t \notin [-1, 1] \end{cases}.$$

$R_x(t)$ est donc une fonction triangle d'amplitude 4 et de support $[-1, 1]$. On vérifie bien que R_x est paire et majorée en valeur absolue par sa valeur en zéro.

3.5 Calcul pratique

Comme dans le cas du calcul d'un produit de convolution, le calcul de la fonction d'intercorrélation de deux signaux peut se faire soit en passant dans le domaine de Fourier en utilisant le résultat 4 et les propriétés du produit convolution, soit en appliquant directement la définition. Pour de nombreux exemples de ces diverses manières procéder, le lecteur est renvoyé au chapitre 4 des notes de cours [1] ainsi qu'au recueil d'exercices correspondant [2]. Comme précédemment, l'approche basée sur un calcul direct de l'intégrale de corrélation est souvent plus simple lorsque les signaux sont à support fini ou limité. Nous illustrons ce point à l'aide de l'exemple traité au paragraphe précédent.

Le signal x est à support limité et les étapes sont identiques à celles permettant le calcul d'un produit de convolution. La première consiste à exprimer les signaux $x(\tau)$ et $x(\tau + t)$ sous forme analytique. On a :

$$x(\tau) = 2(u(\tau - 2) - u(\tau - 3)) \implies x(\tau + t) = 2(u(\tau + t - 2) - u(\tau + t - 3)).$$

Dans la seconde étape, on explicite les supports de $x(\tau)$ et $x(\tau + t)$ en fonction de t . Ainsi :

$$\begin{aligned} x(\tau) &= 2(u(\tau - 2) - u(\tau - 3)) \implies x(\tau) \text{ a pour support } [2, 3], \\ x(\tau + t) &= 2(u(\tau + t - 2) - u(\tau + t - 3)) \implies x(\tau + t) \text{ a pour support } [2 - t, 3 - t]. \end{aligned}$$

Enfin, dans la troisième étape, on évalue l'intégrale de corrélation en fonction de la valeur de t , ce qui nécessite de déterminer l'intersection supports respectifs de $x(\tau)$ et $x(\tau + t)$ afin de déterminer les bornes d'intégration. On a :

- $3 - t \leq 2 \iff t \geq 1$: les supports sont disjoints et $(x \odot y)(t) = 0$.
- $2 < 3 - t \leq 3$ et $2 - t \leq 2 \iff 0 \leq t < 1$: l'intersection des supports est l'intervalle $[2, 3 - t]$. Sur cet intervalle, le produit de $x(\tau)$ et $x(\tau + t)$ est constant et égal à 4. L'intégrale de corrélation prend donc la valeur $(x \odot y)(t) = 4(1 - t)$.
- $3 < 3 - t$ et $2 < 2 - t \leq 3 \iff -1 \leq t < 0$: l'intersection des supports est l'intervalle $[2 - t, 3]$. Ici encore, le produit de $x(\tau)$ et $x(\tau + t)$ est constant et égal à 4 sur cet intervalle et l'intégrale de corrélation prend la valeur $(x \odot y)(t) = 4(1 + t)$.
- $3 < 2 - t \iff t < -1$: les supports sont disjoints et $(x \odot y)(t) = 0$.

On vérifie sur cet exemple que $x \odot y$ est une fonction paire et majorée en valeur absolue par $(x \odot y)(0)$. On retrouve aussi le résultat du paragraphe précédent selon lequel $x \odot y$ est une fonction triangulaire d'amplitude 4 et de support $[-1, 1]$.

4 Systèmes linéaires

Les systèmes linéaires invariants ont une importance particulière dans de nombreux domaines du génie pour deux principales raisons : d'une part, on dispose de nombreux outils pour en effectuer

l'étude, en analyser le comportement et en contrôler la réponse tant dans le domaine des temps que dans celui des fréquences ; d'autre part, de nombreux systèmes réels peuvent être considérés comme linéaires et invariants avec une très bonne approximation. C'est pourquoi l'étude de tels systèmes revêt une importance particulière.

4.1 Définitions

De manière très générale, un *système* est opérateur (une « boîte noire ») qui transforme un ensemble de signaux d'entrée $x_m(t)$; $1 \leq m \leq M$ en un ensemble de signaux de sortie $y_n(t)$; $1 \leq n \leq N$. Ici, nous nous limiterons aux systèmes ayant une seule entrée et une seule sortie que l'on représente schématiquement comme indiqué à la figure 3. Nous précisons maintenant les propriétés qui font qu'un tel système est *invariant* et *linéaire*.



FIG. 3 – Représentation schématique d'un système transformant un signal d'entrée $x(t)$ en un signal de sortie $y(t)$.

Définition 3 Soit S un système qui à une entrée $x(t)$ associe la sortie $y(t)$. Le système S est invariant si et seulement si, pour toute entrée x et pour tout décalage t_0 , on a :

$$x(t) \xrightarrow{S} y(t) \implies x(t - t_0) \xrightarrow{S} y(t - t_0)$$

La caractérisation ci-dessus traduit le fait que le comportement du système reste inchangé au cours du temps, ou, en d'autres termes, que les propriétés du système sont invariantes au cours du temps.

Définition 4 Un système S est linéaire si et seulement si il satisfait au principe de superposition, c'est-à-dire si, pour toute paire de signaux d'entrée (x_1, x_2) et pour toute paire de scalaires (a_1, a_2) , on a :

$$\left. \begin{array}{l} x_1(t) \xrightarrow{S} y_1(t) \\ x_2(t) \xrightarrow{S} y_2(t) \end{array} \right\} \implies a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) \xrightarrow{S} a_1 y_1(t) + a_2 y_2(t)$$

4.2 Caractérisation

Les définitions ci-dessus permettent de définir précisément ce qu'est un système linéaire et/ou invariant, mais ne sont pas toujours très pratique à manipuler. On peut montrer qu'un système est linéaire et invariant si et seulement si une des deux propriétés suivantes est vérifiée :

Propriété 1 Un système S est linéaire et invariant si et seulement si pour toute entrée $x(t)$, la sortie peut s'exprimer sous la forme :

$$y(t) = (h * x)(t) \tag{7}$$

où le signal $h(t)$, qui ne dépend pas de x , caractérise le système S .

Propriété 2 Un système S est linéaire et invariant si et seulement si il admet comme fonctions propres toutes les fonctions exponentielles, c'est-à-dire si on a :

$$\forall s \in \mathbb{C}, x(t) = e^{st} \implies y(t) = H(s)e^{st}$$

4.2.1 Interprétation

Les fonctions propres jouent pour les systèmes un rôle analogue à celui des vecteurs propres pour les matrices. Ainsi, lorsque le signal d'entrée du système est une fonction propre, la sortie correspondante est égale à la même fonction multipliée par un scalaire ; ces scalaires sont analogues aux valeurs propres des matrices. Ici les fonctions propres sont les fonctions exponentielles et les «valeurs propres» associées sont les coefficients $H(s)$ qui dépendent bien entendu du signal d'entrée, donc du coefficient s de l'exponentielle. Par ailleurs, le système étant linéaire et invariant, son entrée et sa sortie sont liés par l'équation 7 et on a :

$$x(t) = e^{st} \implies y(t) = (h * x)(t) = \int_{\mathbb{R}} h(\tau) e^{s(t-\tau)} d\tau \quad (8)$$

En développant l'exponentielle et en observant que le terme e^{st} est indépendant de la variable d'intégration τ et peut donc être sorti de l'intégrale, on obtient :

$$y(t) = \left(\int_{\mathbb{R}} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau \right) \cdot e^{st}$$

En comparant l'expression ci-dessus à l'équation 8, on en conclut la «valeur propre» $H(s)$ associée à la fonction propre e^{st} n'est autre que la transformée de Laplace de la fonction $h(t)$ qui caractérise le système.

4.2.2 Réponse impulsionnelle, réponse fréquentielle et fonction de transfert

D'après la propriété 1, un système linéaire invariant est caractérisé sans ambiguïté, de manière unique, par la fonction $h(t)$ qui détermine sa relation entrée-sortie par l'intermédiaire de l'équation 7. Par ailleurs, on remarque que si l'entrée $x(t)$ est une impulsion de Dirac, on a :

$$y(t) = (h * \delta)(t) = h(t)$$

C'est la raison pour laquelle $h(t)$ est appelée *réponse impulsionnelle* du système. Encore une fois, tout système linéaire invariant est caractérisé par sa réponse impulsionnelle ou bien sûr par toute quantité équivalente à celle-ci. Parmi les quantités équivalentes, on utilise souvent la transformée de Laplace et la transformée de Fourier de $h(t)$. La transformée de Laplace $H(s)$ de $h(t)$, que l'on désigne par le terme de *fonction de transfert* du système linéaire, a pour principaux intérêts de permettre une étude simple de la stabilité du système (voir paragraphe 4.4) et de bien se prêter à la synthèse des filtres. La transformée de Fourier $H(\nu)$ de $h(t)$, appelée *réponse fréquentielle* du système, permet de mettre en évidence comment le système linéaire transmet l'énergie de l'entrée à la sortie en fonction de la fréquence. En effet, d'après l'équation 7 :

$$\begin{aligned} y(t) = (h * x)(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} Y(\nu) = H(\nu)X(\nu) \\ \implies |Y(\nu)|^2 &= |H(\nu)|^2 |X(\nu)|^2 \end{aligned}$$

ce qui donne la relation entre les spectres d'énergie de l'entrée et de la sortie en fonction du carré du module de la réponse fréquentielle.

Remarque Par transformation de Laplace et de Fourier, l'équation 7 devient respectivement $Y(s) = H(s)X(s)$ et $Y(\nu) = H(\nu)X(\nu)$. L'opération de convolution devient donc, dans les domaines transformés, un produit usuel généralement plus simple à évaluer. Mais il faut prendre garde au fait que cette *simplification* de l'opération de convolution est souvent illusoire : par exemple, si l'on cherche à évaluer la sortie du système pour une entrée donnée $x(t)$, il faut au préalable calculer les transformées de Laplace ou de Fourier de $x(t)$ et $h(t)$ puis, après avoir évalué $Y(s)$ ou $Y(\nu)$ par une simple multiplication, revenir dans le domaine temporel par transformation inverse. Toutes ces opérations peuvent parfois se révéler plus complexes que l'évaluation directe d'un produit de convolution. Le choix d'un domaine de travail pour effectuer de telles opérations doit donc être fait en tenant compte des caractéristiques du problème à traiter.

4.3 Réponse à une entrée périodique

Les signaux périodiques jouent un rôle particulier dans de nombreux domaines (biologie et médecine, ondes et propagation, etc.). On peut donc se demander comment un système linéaire invariant transforme les signaux périodiques. On a le résultat suivant :

Résultat 6 Soit S un système linéaire invariant de réponse fréquentielle $H(\nu)$. Si l'entrée x de S est périodique, de période T et développable en série de Fourier, alors la sortie y est elle aussi périodique, de période T et développable en série de Fourier. De plus, les coefficients X_n et Y_n des développements en série de Fourier respectifs de x et y sont liés par la relation :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, Y_n = H(n/T) X_n \quad (9)$$

Ce résultat peut être montré simplement en utilisant la caractérisation spectrale des signaux périodiques. En effet, comme x est à la fois périodique et développable en série de Fourier, sa transformée de Fourier existe et prend la forme :

$$X(\nu) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} X_n \delta(\nu - n/T)$$

En utilisant la relation entre les transformées de Fourier de la sortie et de l'entrée d'un système linéaire invariant, on obtient :

$$\begin{aligned} Y(\nu) &= H(\nu)X(\nu) \\ &= H(\nu) \sum_{n \in \mathbb{Z}} X_n \delta(\nu - n/T) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} H(\nu)X_n \delta(\nu - n/T) \end{aligned}$$

En utilisant la propriété des impulsions de Dirac selon laquelle $f(t)\delta(t - t_0) = f(t_0)\delta(t - t_0)$, on aboutit finalement à :

$$Y(\nu) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} H(n/T)X_n \delta(\nu - n/T)$$

Ceci montre que la transformée de Fourier de y est une suite d'impulsions régulièrement espacées de n/T , ce qui caractérise un signal périodique de période T . De plus, l'amplitude de chaque impulsion est égale au coefficient correspondant du développement en série de Fourier, ce qui prouve l'équation 9.

Le résultat ci-dessus montre que chaque composante fréquentielle X_n de l'entrée est multipliée par le facteur $H(n/T)$. Il en résulte que ces composantes fréquentielles peuvent être soit amplifiées, soit atténuées selon que $H(n/T)$ est de module supérieur ou inférieur à 1, mais qu'un système linéaire ne peut en aucun cas faire apparaître dans la sortie des composantes fréquentielles qui ne sont pas présentes dans l'entrée. Ceci différencie les systèmes linéaires d'opérateurs (non linéaires) comme les modulateurs ou les seuils qui, eux, enrichissent le contenu fréquentiel de l'entrée.

4.4 Stabilité et causalité

Les notions de stabilité et de causalité sont importantes pour la conception et l'emploi des systèmes linéaires. La stabilité traduit le fait qu'une entrée admettant une transformée de Fourier ne va pas faire diverger la sortie ; dans la pratique, on exige toujours qu'un système possède cette propriété. La causalité signifie que, lors du fonctionnement du système, l'effet ne peut précéder la cause ; une telle propriété est toujours exigée des systèmes *physiques* qui doivent traiter les signaux *en ligne*. Par contre, les systèmes conçus pour les traitements hors ligne n'ont aucune raison d'être causaux.

4.4.1 Stabilité

Il existe plusieurs définitions de la stabilité. On donne ici la plus courante, celle de la *stabilité forte*.

Définition 5 Un système est stable au sens fort si et seulement si à toute entrée x bornée correspond une sortie y bornée.

La définition 5 s'applique à tout système, qu'il soit linéaire ou non. Pour les systèmes linéaires invariants, on a la caractérisation suivante, qui nous admettons sans démonstration :

Propriété 3 Un système linéaire invariant est stable au sens fort si et seulement si la réponse impulsionnelle $h(t)$ est absolument intégrable, c'est-à-dire si on a :

$$\int_{\mathbb{R}} |h(t)| dt \quad \text{converge}$$

Dans la pratique, on ne considérera que les systèmes dont la réponse impulsionnelle a au plus un nombre dénombrable de discontinuités. Or l'intégrabilité absolue et le nombre fini de discontinuités constituent les conditions de Dirichlet, qui sont nécessaires et suffisantes pour que la transformée de Fourier existe. Dans ce qui suit, nous utiliserons donc la caractérisation suivante :

Propriété 4 Un système linéaire invariant est stable au sens fort si et seulement si la réponse fréquentielle $H(\nu)$ existe ou, de manière équivalente, si et seulement l'axe imaginaire est inclus dans la région de convergence de sa fonction de transfert $H(s)$.

4.4.2 Causalité

Le fait que l'effet ne peut précéder la cause se traduit en exigeant que si l'entrée est uniformément nulle pour tout $t < t_0$, alors la sortie est elle aussi nulle pour tout $t < t_0$. On montre aisément que l'on a la caractérisation suivante :

Propriété 5 Un système linéaire invariant S de réponse impulsionnelle $h(t)$ est causal si et seulement si $\forall t < 0, h(t) = 0$.

4.4.3 Système réalisable

Définition 6 Un système linéaire invariant est dit réalisable si et seulement si il est à la fois stable et causal.

Propriété 6 Si un système linéaire invariant est réalisable, les pôles de sa fonction de transfert $H(s)$, s'il en existe, sont de partie réelle négative.

Cette dernière propriété se démontre en observant que la stabilité est vérifiée si et seulement si l'axe imaginaire est inclus dans la région de convergence de $H(s)$. Par ailleurs, si le système est causal, alors sa réponse impulsionnelle $h(t)$ est nulle lorsque t est négatif. h est donc un signal «de droite» et la région de convergence de $H(s)$ est un demi plan «de droite». La région de convergence étant un demi plan «de droite» qui contient l'axe imaginaire, les pôles, s'il en existe, sont situés dans le demi-plan de gauche et sont donc de partie réelle négative.

Remarque La propriété ci-dessus n'est, rigoureusement, qu'une condition nécessaire de pour qu'un système soit réalisable. En effet, si les pôles sont tous de partie réelle négative, on peut seulement montrer que le système est stable et que sa réponse impulsionnelle est un signal «de droite». Cependant, dans la pratique, pour affirmer qu'un système est réalisable, on se contentera souvent de vérifier que la condition nécessaire est vraie.

Références

- [1] M. J. Corinthios, *Analyse des Signaux*, vol. 5419 of *Notes de cours*, École Polytechnique, Montréal, Canada, 2001.
- [2] M. Lemire and M. J. Corinthios, *Analyse des Signaux, Recueil de Problèmes*, École Polytechnique, Montréal, Canada, 1994.